

9.1. KOMBINATORIKA, HALMAZOK

Számoljuk össze! – megoldások

1001 *a)* $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ *b)* 10, 6, 4, 2, 0, –2, –4, –8

1002 *a)* 4 *b)* 8, 4, 0, –4

1003 *a)* 6 *b)* 3, mégpedig a –2, –8 és 0.

1004 $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

1005 $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 96$

1006 $3 \cdot 3 = 9$

1007 *a)* $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$

1008 $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

1009 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$

1010 *b)* $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ *c)* 2

1011 *a)* A mozdonyokra $2 \cdot 1$, a kocsikra $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ lehetősége van egymástól függetlenül. Ez összesen $2 \cdot 120 = 240$.

b) Mozdonyt választani most is 2 lehetősége van, utána pedig az első kocsit 5, a másodikat 4 járműből választhatja ki. Így összesen $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$-féle szerelvényt állíthat össze.

1012 *a)* Mivel megkülönböztetjük a helyeket, az olyan, mintha egyszerű lineáris sorba kellene tennünk három személyt. Vagyis a megoldás $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

b) Ha a székeket nem különböztetjük meg egymástól, akkor úgy kell eljárnunk, mint a körberakásoknál általában. Válasszuk ki egyiküket, és vele kezdjük a sort. Az eredmény $2 \cdot 1 = 2$ lehetőség. (Nyilván, ha A már ül, akkor B és C legfeljebb helyet cserélhetnek.)

c) Mivel összesen hárman vannak, így mindig mindegyikük szomszédja a másik kettőnek. (Háromszögben minden csúcs szomszédos.) Az eredmény tehát 1.

1013 *a)* A halmazok elemeinek párosítását összesen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féleképpen végezhetjük el.

Az egyes hozzárendelések során a következő függvényeket nyerjük:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$i(x)$	$j(x)$	$k(x)$
1	2	2	4	4	6	6
2	4	6	2	6	4	2
3	6	4	6	2	2	4

b) A függvények közül $f(x)$ és $j(x)$ lineáris (ábrázolva a pontokat, ezeket tudjuk egyetlen folytonos egyenessel összekötni). A szabályaik:

$$f(x) = 2x \quad \text{és} \quad j(x) = -2x + 8.$$

1014 *a)* Legyen a két szín mondjuk piros (P) és fekete (F). A felső sor-alsó sor ekkor: PF-FP vagy FP-PF. Tehát két lehetőség van.

b) Legyen a három szín mondjuk piros (P), kék (K) és fekete (F). Ha a bal felső sarokba pl. P-t írunk, akkor mellé és alá 2-2 lehetőség van a sor és oszlop kitöltésére. Ha mondjuk a felső sor PFK, akkor bármit is írunk a második sor első négyzetébe, az utána levők már meghatározottak



(hiszen a harmadik színt nem írhatjuk saját maga alá, oda P-t kell írni). Az utolsó sor mindenképpen eleve meghatározott. Mivel a bal felső négyzetet háromféleképp tölthetjük ki, így összesen $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ lehetőségünk van a négyzet színezésére.

Megjegyzés: Ha elég türelmesek vagyunk, akár egyesével is összegyűjthetjük a megoldásokat. Érdemes jó stratégiát kitalálni, hogy ne hagyjunk ki színezést, illetve ne készítsük el kétszer ugyanazt!

1015 *a)* A hátsó két ajtót összesen 3 helyzetbe mozgathatjuk. Ugyanis vagy egymás mellett vannak a jobb oldalon, vagy egymás mellett vannak a bal oldalon, vagy a két szélen vannak.

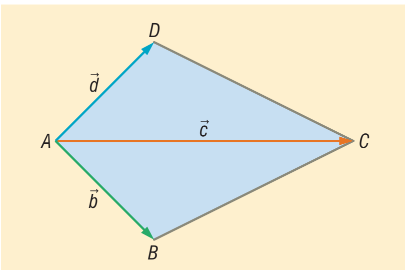
b) Az *a)* kérdésre adott választól függetlenül az első (tükrös) ajtó 3 helyzetben lehet: jobb oldalon, középen, bal oldalon. Így a válasz: $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$.

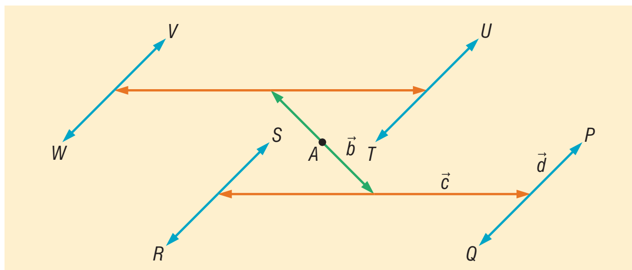
c) Az alsó részen a fentihez hasonlóan ismét 9 lehetőség van az ajtók beállítására. Mivel az alsó és a felső rész egymástól függetlenül állítható, ezért a keresett érték $(3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^4 = 81$.

1016 A feladatra két megoldást is mutatunk.

Rajzoljunk egy $ABCD$ deltoidot, és irányítsuk a kért szakaszokat mondjuk A-tól.

Legyen $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. A $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ vektorok összeadása tulajdonképpen egy útvonalat ad meg. Mindegyik vektort kétféle iránnyal tekinthetjük. Mivel a deltoid AB és AD oldala, illetve AC átlója nem lehetnek párhuzamosak, így a különféle irányításokkal összesen nyolc különböző pontba jutunk el (az eredeti irányítással például a P pontba jutunk A-ból).





A másik megoldáshoz jusson eszünkbe, hogy valamely $\vec{b}$ vektort ellentétesen irányítva $-\vec{b}$ vektort kapjuk! Ekkor a feladatot értelmezhetjük a következőképpen is: hányféleképpen oszthatjuk ki a + és – előjeleket az eredeti vektorösszegben: $(\square\vec{b}) + (\square\vec{c}) + (\square\vec{d})$? Mivel három helyre kell a kétféle jelből beírnunk egyet-egyet, ezért a megoldások száma $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Sajnos ennyivel még nem fejezhetjük be a megoldásokat, diszkutálnunk is kell a feladatot. Ha ugyanis a deltoid rombusz, akkor $\vec{b} + \vec{d} = \vec{c}$. Ekkor előfordul, hogy különböző előjelkiosztással ugyanabba a pontba jutunk: $\left(\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = -\vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{0};\ S = A = T\right)$, így csak 7 különböző megoldást kapunk.

Megjegyzés: A vektorok összeadása felcserélhető művelet, ezért $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ sorrendjét nem kell figyelembe vennünk a megoldás során!

Halmazok – megoldások

1017 *a)* Nem, mert nem egyértelmű.

b) Igen.

c) Igen.

d) Nem, mert nincs róla információnk.

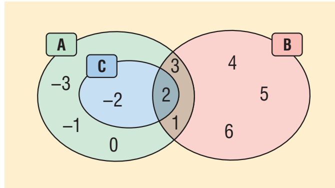
e) Igen.

1018 *a)* $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 6\}$, $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } 0 < x < 10\}$

b) C = {rövid magyar magánhangzók}, D = {a „Rákóczi FC” mássalhangzói}



1019 A Venn-diagram az ábrán látható. (➡)



1020 *a)* Igen. *b)* Nem.
c) Nem. *d)* Igen.

1021 *a)* Végtelen sok ilyen szám van.
b) $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$

1022 Jelölések: ász: á, király: k, felső: f, alsó: a. A kételemű részhalmazok:

{á; k}, {á; f}, {á; a}, {k; f}, {k; a}, {f, a}.

1023 *a)* $\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{2; 3\}$, $\{2; 5\}$, $\{3; 5\}$, $\{2; 3; 5\}$.
b) $\{1; 4\}$, $\{1; 9\}$, $\{1; 16\}$, $\{4; 9\}$, $\{4; 16\}$, $\{9; 16\}$.

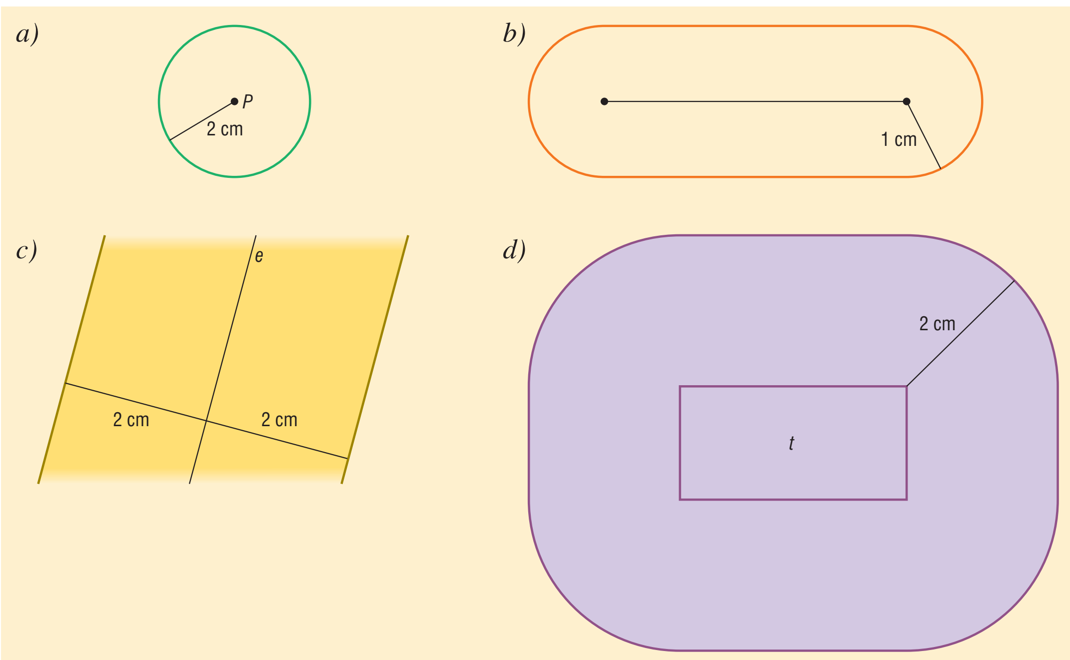
1024 A-ra végtelen sok megoldás adható, a legszűkebb: $A = \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$.

1025 *a)* $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$, $\varnothing$.
b) Végtelen sok.

1026 *a)* Igaz, hamis, igaz, igaz. *b)* Igen, az E halmaz. Nincs.
c) Igen, az A halmaz és a C halmaz.

1027 *a)* $R \subset P$ igaz. *b)* $P \subset T$ igaz.
c) Egyik sem igaz. *d)* Igaz, igaz, hamis, hamis, hamis, hamis, igaz.

1028 *a)* Körvonal. *b)* „Futópálya”.
c) Zárt sáv. *d)* Lekerekített sarkú téglalap (t hozzátartozik).





1029 *a)* Ha B-nek van olyan eleme, amely nem eleme A-nak, ugyanakkor nincs olyan elem, amely mindkét halmazban benne van.

b) Ha B-nek nincs olyan eleme, amely nem eleme A-nak, ugyanakkor nincs olyan elem, amely mindkét halmazban benne van, azaz ha $B = \emptyset$.

c) A második halmaz részhalmaza a harmadiknak.

1030 *a)* Gömbfelület.

b) Nyitott gömbtest.

c) Az AB szakaszt felező, rá merőleges sík.

d) Hengerfelület, tengelye az e egyenes.

1031 {1; 2; 3}, {1; 2; 4}, {1; 2; 5}, {1; 2; 6}, {1; 3; 4}, {1; 3; 5}, {1; 3; 6}, {1; 4; 5}, {1; 4; 6}, {1; 5; 6}, {2; 3; 4}, {2; 3; 5}, {2; 3; 6}, {2; 4; 5}, {2; 4; 6}, {2; 5; 6}, {3; 4; 5}, {3; 4; 6}, {3; 5; 6}, {4; 5; 6}.

1032 *a)* A kitöltött táblázat:

	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c, d\}$
0 elemű részhalmaz	1	1	1	1
1 elemű részhalmaz	1	2	3	4
2 elemű részhalmaz	–	1	3	6
3 elemű részhalmaz	–	–	1	4
4 elemű részhalmaz	–	–	–	1

b) A számok a Pascal-háromszög soraiból valók. Ennek ötödik sora: 1; 5; 10; 10; 5; 1.

1033 *a)* „Mindenki költözzön öttel nagyobb sorszámú szobába!” Ekkor felszabadul az első öt szoba, így oda be lehet költöztetni a család mind az öt tagját.

b) Végtelen sokszor végtelen sok érkezőt kell elszállásolnunk. Először is keressünk jól beazonosítható végtelen láncokat a természetes számok között. Ilyenek például a különböző prímhatványok: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, …; 3^1, 3^2, 3^3, …; 5^1, 5^2, 5^3, … stb. A természetes számok között végtelen sok prím van, és minden egyes prím hatványainak sorozatában is végtelen sok elem van. Tehát van hely a végtelen sokszor végtelen sok érkezőnek, csak fel kell szabadítanunk a szobákat. Ehhez küldjük minden n-edik prímhatvány szoba lakóját a $2n$-edik prím ugyanannyiadik hatványú szobába.

Példaként tekintsük az 5^7 sorszámú szoba lakóját. Ez a szobaszám a *harmadik* prím hetedik hatványa, ezért lakójának a *hatodik* prím hetedik hatványa sorszámú szobába kell költöznie, azaz új szobaszáma 13^7 lesz. És így tovább minden prímhatvány sorszámú szobára. Ekkor üresen maradnak az összes páratlanadik prímhatvány-láncolatban szereplő számú szobák, hiszen azokba nem költözik senki. Oda kell beköltöztetni az érkezőket, mégpedig a következőképpen:

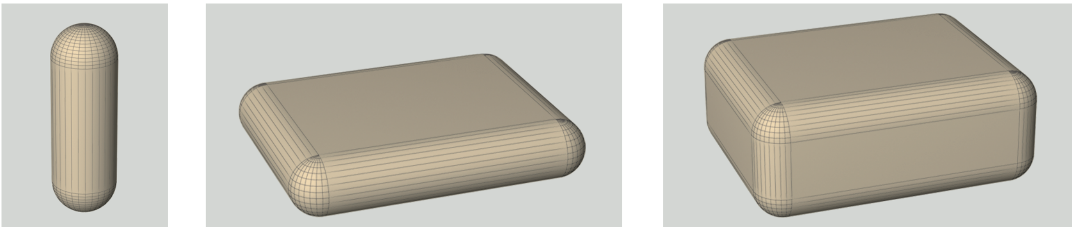
A buszok ülésszáma (pl. s_5) jelentse a hatványkitevőt, a busz sorszáma pedig azt, hogy hányadik láncba kerül az utas a következő formula szerint: *az n-edik buszhoz tartozzon a (2n – 1)-edik prím.* Konkrét példán: keressük meg, melyik szobába kell mennie a B_4 jelű busz 13. székén helyet foglaló utasnak. Szobaszáma a $(2 \cdot 4 - 1) = 7$-edik prím hatványainak láncolatában a 13. láncszem, vagyis a 13. hatvány. Mivel a hetedik prím a 17, így a kedves vendég számára a 17^{13} sorszámú szoba lesz kiutalva.



1034 *a)* A szakasz mentén egy hengerpalást, a két végén pedig egy-egy félgömb. (Gyógyszeres kapszula.) Csak a felület tartozik a halmazhoz!

b) A téglalappal párhuzamosan egy-egy vele egybevágó téglalap (alatta és felette), oldalainál félhengerek, sarkainál pedig negyedgömbök. (Hasonlóan, mint amikor a légpárnás hajó felfújja a légpárnákat.) A megoldás az egész test, határoló felületével együtt.

c) Lekerekített szélű téglatest, ahol a lapok egybevágóak az eredeti lapjaival, oldalélei negyedhengerek, sarkai nyolcadgömbök. (Régi utazóbőrönd.) Csak a nyitott test tartozik a halmazhoz!



Megjegyzés: Érdemes meggondolni, mennyiben változnak a fenti alakzatok, ha kiindulásul nem zárt, hanem nyitott (vagy félig nyitott) szakaszt, téglalapot, téglatestet adunk meg!

Halmazműveletek – megoldások

1035 $A \cap B = \{7; 43; 61\}$

1036 *a)* Négy: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1; 3\}$. *b)* $\varnothing$, $\overline{A}$. Az is lehet, hogy a kettő egybeesik, ha $A = U$.

1037 $A \cap D = \varnothing$; $B \cap C = \varnothing$; $E \cap D = \varnothing$; $E \cap C = \varnothing$; $E \cap B = \varnothing$; $E \cap A = \varnothing$.

1038 *a)* $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$; $A \cap B = \{1; 3; 5\}$; $A \setminus B = \{2; 4; 6\}$; $B \setminus A = \{7; 9\}$.

b) Bármely C halmaz, melynek részhalmaza a $\{7; 9\}$.

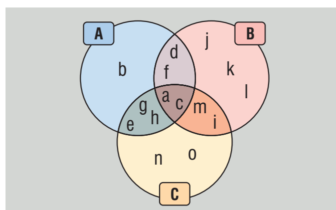
1039 *a)* Komplementerek.

b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ vagy $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $\overline{A \cup B} \cup (A \cap B)$ vagy $\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B)$.

1040 *a)* $A \setminus B = \{b; e; g; h\}$,
$B \setminus C = \{d; f; j; k; l\}$,
$A \cap C = \{a; c; e; g; h\}$,
$A \cup B = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; k; l; m\}$.

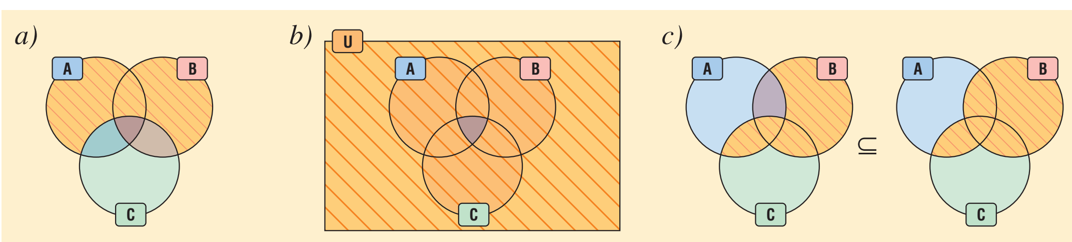
b) $A \setminus (B \cup C) = \{b\}$.

c) A Venn-diagram az ábrán látható.



1041 *a)* A két halmaz megegyezik. *b)* A két halmaz megegyezik.

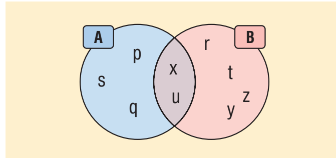
c) Az első részhalmaza a másodiknak.





1042 Készítsünk Venn-diagramot. Először írjuk be a metszetet (x; u), majd töltsük fel a B halmaz A-n kívül eső részét (r; t; y; z). Amit az unióból eddig nem írtunk sehova, az kerül az A halmaz B-n kívüli részébe. Így kapjuk:

$$A = \{p, q, s, u, x\}.$$

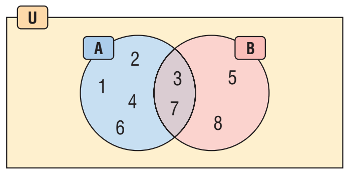


1043 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$

1044 *a)* $A \cup \{1; 2; 3; 4\} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$;
$A \cap \{-1; -2; -3; -4\} = \{-1; -2; -3\}$;
$A \setminus \{0; 2; 4\} = \{-3; -2; -1; 1\}$;
$\{\text{egyjegyű pozitív prímek}\} \setminus A = \{3; 5; 7\}$.
b) $U = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, ezért $\overline{A} = \{-5; -4; 3; 4\}$.

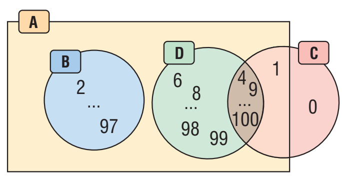
1045 *a)* Bármely kettő diszjunkt.
b) $[B \setminus (A \cup C)] \cup [(A \cap C) \setminus B]$;
$[C \setminus (A \setminus B)] \setminus (B \setminus A)$;
$\overline{A \cup B \cup C} \cup \left[((A \cup C) \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)\right]$.
c) $A \setminus (B \cup C)$

1046 Az utolsó feltétel szerint A vagy B halmazon kívül nincsenek további elemek az univerzumban. Haladjunk a Venn-diagramban belülről kifelé. Így $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 7\}$.



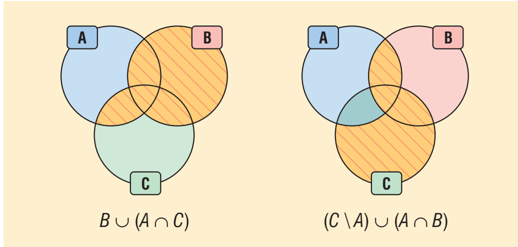
1047 *a)* Elemeikkel megadva: $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
$A = \{2; 3; 5; 7\}$;
$B = \{0; 4; 6; 8; 9\}$.
Ekkor $\overline{A \cup B} = \{1\}$.
b) Elemeikkel megadva: $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
$A = \{2; 3; 5; 7\}$;
$B = \{6; 7; 8; 9\}$.
Ekkor $\overline{A \cup B} = \{0; 1; 4\}$.

1048 *a)* Elemeikkel megadva: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; \ldots; 96; 97; 98; 99; 100\}$;
$B = \{2; 3; 5; 7; 11; \ldots; 73; 79; 83; 89; 97\}$;
$C = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100\}$;
$D = \{4; 6; 8; 9; 10; \ldots; 94; 95; 96; 98; 99\}$.
Így $B, D \subseteq A$.
b) Igen, B és C diszjunkt, hiszen nem lehet egy szám egyszerre prím és négyzetszám. Hasonlóan nem lehet egyszerre prím és összetett is egy szám, ezért B és D is diszjunkt.
c) A Venn-diagram az ábrán látható.





1049 *a)* A Venn-diagramok az ábrán láthatók.

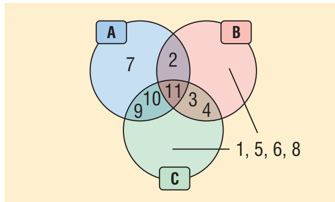


b) Töltsük fel a Venn-diagram összes mezőjét egy-egy számmal, például: $A = \{1; 2; 4; 5\}$, $B = \{2; 3; 5; 6\}$, $C = \{4; 5; 6; 7\}$.

Ekkor
$$B \cup (A \cap C) = \{2; 3; 4; 5; 6\}$$
és
$$(C \setminus A) \cup (A \cap B) = \{2; 5; 6; 7\}.$$

c) A másik halmazhoz nem tartozó részeket üressé kell tennünk:
$$B \cup (A \cap C) \subseteq (C \setminus A) \cup (A \cap B), \quad \text{ha} \quad (A \cap C) \setminus B = B \setminus (A \cup C) = \varnothing.$$
Fordítva,
$$(C \setminus A) \cup (A \cap B) \subseteq B \cup (A \cap C), \quad \text{ha} \quad C \setminus (A \cup B) = \varnothing.$$

1050 *a)* A 2 eleme A-nak és B-nek is, de nem eleme C-nek. Hasonlóan, 11 eleme mindhárom halmaznak. A 3 és 4 helye is rögzített. Ebből és az utolsó feltételből tudjuk, hogy az 1, 5, 6, 8 elemek valamilyen elosztásban a B vagy C halmaz mástól diszjunkt részébe kerülhetnek. A maradék 9 és 10 így csak az $(A \cap C) \setminus B$ részbe írhatók. Azaz $A = \{2; 7; 9; 10; 11\}$. A Venn-diagram az ábrán látható.



b) A B halmaz már most is tartalmaz két páratlan számot, így oda nem kerülhet 1 és 5, ezek csak C-be eshetnek. A 6 és 8 helye azonban továbbra is kérdéses. Mivel több információnk nincs, így négy megoldás lehetséges:

$6, 8 \in B$; vagy $(6 \in B$ és $8 \in C)$;
vagy $(6 \in C$ és $8 \in B)$; vagy $6, 8 \in C$.

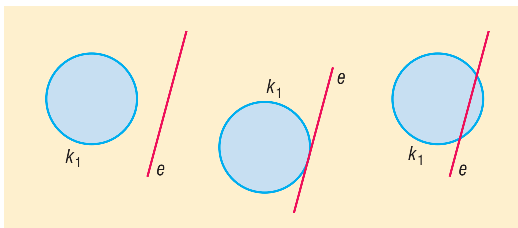
Megoldás	*B*	*C*
1.	{2; 3; 4; 11; **6; 8**}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11}
2.	{2; 3; 4; 11; **6**}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11; **8**}
3.	{2; 3; 4; 11; **8**}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11; **6**}
4.	{2; 3; 4; 11}	{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11; **6; 8**}

1051 *a)* A metszet lehet

– üres halmaz (ekkor e és k_1 *elkerülők*, $|e \cap k_1| = 0$);

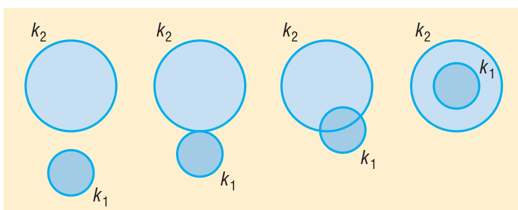
– egyetlen pont (ekkor e és k_1 *érintők*, $|e \cap k_1| = 1$);

– zárt szakasz (ekkor e és k_1 *metszők*, $|e \cap k_1| = \infty$).



(Utóbbi két pont lenne, ha körvonalról lenne szó, most viszont zárt körlapunk van.)

b) A metszeteket lásd az ábrákon. Két különböző sugarú körlap lehet *diszjunkt, érintő, metsző,* és *részhalmaza* egyik a másiknak. Koncentrikus körlapok esetén is ez utóbbi a helyzet.

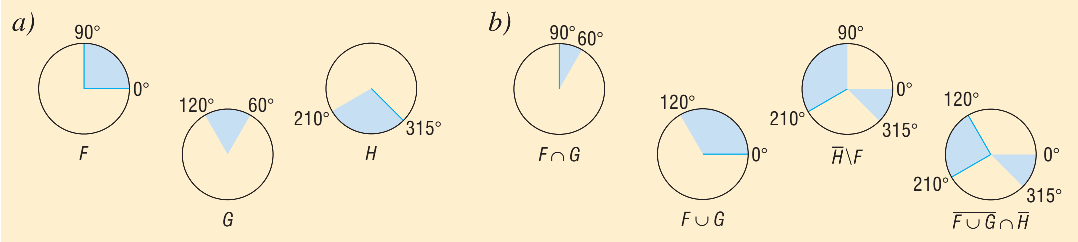


c) Körgyűrű, a két kör közötti rész. A külső körvonal igen, a belső körvonal nem tartozik a halmazhoz!

Megjegyzés: Érdemes átgondolni, mi változik, ha zárt helyett nyitott körlapot, illetve a körvonalat adjuk meg!



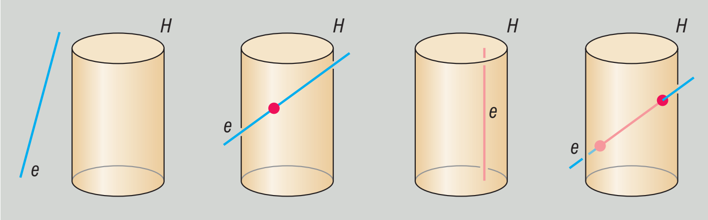
1052 A megoldás az ábrákról leolvasható.



1053 *a)* A metszet üres halmaz, ha elkerülik egymást.

Egyetlen pont, ha az egyenes érinti a hengert.

Egy egész egyenes, ha a henger részhalmazként tartalmazza az egész egyenest.

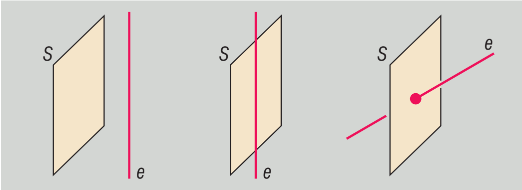


Végül bármilyen hosszú szakasz, ha az egyenes döfi a hengert. (Ne feledjük, zárt hengertestről van szó!)

b) Az egész sík, ha az egyenes párhuzamos a síkkal és nincs közös pontjuk.

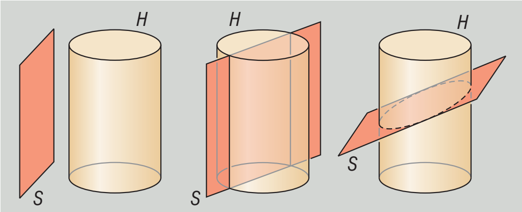
Két diszjunkt félsík, ha az egyenes a síkban futott.

Egy pontban kilyukasztott sík, ha az egyenes döfte a síkot.



c) Az egész sík, ha eredetileg diszjunktak voltak a hengerrel.

Két diszjunkt félsík, ha volt közös pontjuk és a henger tengelye párhuzamos a síkkal (a két félsík távolsága maximum a henger átmérője lehet). A metszet lehet egy lyukas sík, ahol a lyuk kör (ha a sík merőleges a henger tengelyére), vagy ellipszis (ha a sík derékszögnél kisebb pozitív szöget zár be a henger tengelyével).

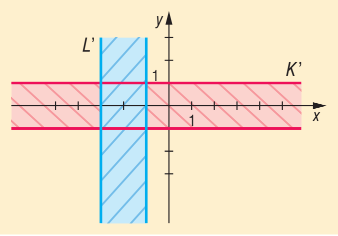


Megjegyzés: Hogy a sík valóban ellipszisben metszi a hengert, bizonyítani nem tudjuk (középiskolai tanulmányaink során később sem foglalkozunk vele).

1054 *a)* $K = \{(x; y) \mid |x| \le 1 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$ vagy $K = \{(x; y) \mid -1 \le x \le 1 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$.

$L = \{(x; y) \mid |y-2| \le 1 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$ vagy $L = \{(x; y) \mid 1 \le y \le 3 \text{ és } x, y \in \mathbb{R}\}$.

b) Jelölje K' a K, L' pedig az L elforgatásából kapott sávokat. $K' \setminus L'$ a csak \\\ ferdén satírozott; $L' \setminus K'$ a csak /// ferdén satírozott; $K' \cap L'$ pedig a rácsos rész.

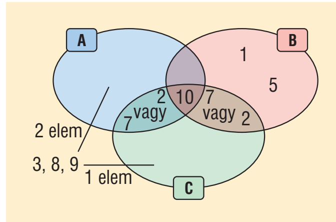


Halmazként felírva őket (minden esetben $x, y \in \mathbb{R}$):

$K' \setminus L' = \{(x; y) \mid |y| \le 1 \text{ és } (x < -3 \text{ vagy } x > -1)\}$;

$L' \setminus K' = \{(x; y) \mid |x+2| \le 1 \text{ és } (y < -1 \text{ vagy } y > 1)\}$;

$K' \cap L' = \{(x; y) \mid |x| \le 1 \text{ és } |y-2| \le 1\}$.



1055 *a)* Amit biztosan beírhatunk a halmazábrába, az a harmadik, illetve az utolsó feltételből adódik. A 10 a hármas metszetbe, az 1, valamint az 5 csak a B-be kerül. $(A \cap B) \setminus C$ üres. A második, illetve az utolsó előtti feltételből $(C \cap B) \setminus A$ részben egy elem van, ez vagy 2 vagy 7.

Ennél többet nem tudunk, ezek szerint

$$B = \{1; 5; 7; 10\} \quad \text{vagy} \quad B = \{1; 2; 5; 10\}.$$

b) A feladat feltételei megengedik, hogy a 7 az A-ba essen, de az is lehet, hogy $7 \notin A$. Nem tudjuk pontosan megmondani.

c) Folytatva az *a)* gondolatmenetét, C-ből egy, A-ból még két elem hiányzik. A szabad elemek a 3, a 8 és 9. Ezek közül kell kettőt csak A-ba, egyet csak C-be írni. Ez három lehetőség. B-re volt még kettő, így a feladatnak $2 \cdot 3 = 6$ olyan megoldása lehet, amely kielégíti a feltételeket. A táblázatban látható hat lehetőségből kellett felírni hármat.

Megoldás	*A*	*B*	*C*
1.	{7; 10; **8; 9**}	{1; 5; 10; 2}	{2; 7; 10; **3**}
2.	{7; 10; **3; 9**}	{1; 5; 10; 2}	{2; 7; 10; **8**}
3.	{7; 10; **3; 8**}	{1; 5; 10; 2}	{2; 7; 10; **9**}
4.	{2; 10; **8; 9**}	{1; 5; 10; 7}	{2; 7; 10; **3**}
5.	{2; 10; **3; 9**}	{1; 5; 10; 7}	{2; 7; 10; **8**}
6.	{2; 10; **3; 8**}	{1; 5; 10; 7}	{2; 7; 10; **9**}

Halmazok elemszáma, logikai szita – megoldások

1056 $|W| = 8$

1057 *a)* 6 elemű: {e, i, a, ó, í, ő}.

b) 4 elemű: $\{\varnothing; \{a\}; \{b\}; \{a, b\}\}$.

c) Végtelen sok eleme van: {szabályos 3-, 4-, 5-, 6-, 7-, …-szögek}.

d) 6 elemű: {2; 3; 5; 6; 10; 15}.

1058 $|T| = 123 + 45 + 87 = 255$

1059 $|A \cup B| = 20 + 32 - 14 = 38$

1060 Két megoldást is adunk.

I. Alkalmazzuk a logikai szitát:

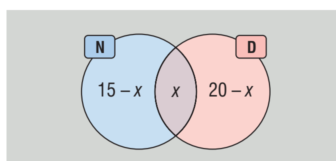
$$26 = |N \cup D| = |N| + |D| - |N \cap D| = 15 + 20 - |N \cap D|,$$

ahonnan a metszet elemszáma 9. Vagyis csak dánul $|D| - |N \cap D| = 11$ fő tanul.

II. Írjuk a Venn-diagramba az elemszámokat a metszettel (x) kezdve. x helyére olyan számot kell írni, hogy

$$15 - x + x + 20 - x = 26$$

legyen. Ez $x = 9$-re teljesül. Így csak dánul $20 - 9 = 11$ fő tanul.



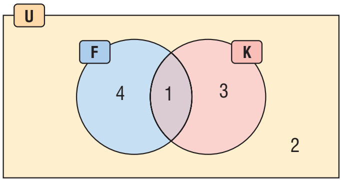
1061 Két megoldást is adunk.

I. Alkalmazzuk a logikai szitát:

$$10 = |U| = |F \cup K| + x = |F| + |K| - |F \cap K| + x = 5 + 4 - 1 + x,$$

ahonnan $x = 2$.

II. Jelölje U a baráti társaságot mint alaphalmazt, F a fociért, K a kosárlabdáért rajongók halmazát. Írjuk az elemszámokat a Venn-diagramba, kezdjük a metszettel. Utána töltsük fel F-t 5 és K-t 4 elemre, majd az egészet egészítsük ki 10-re. A megoldás 2.



1062 Jelölje T a tarka farkú, H a hosszú csőrű szarkák halmazát. A logikai szitát alkalmazva:

$$|T \cup H| = 200 \cdot 0{,}6 + 200 \cdot 0{,}7 - 200 \cdot 0{,}4 = 180,$$

így a rövid csőrű és egyszínű farktollú madarak száma 20. (Ez az összes madár 10%-a.)

1063 $0 \le |N \cap D| \le 4$. (A golyóstollak összes számára nem tudunk mit mondani, mert Magdinak lehetnek olyan tollai is, amelyek az említettektől különbözők.)

1064 Legyen J a jóképű, O az okos fiúk halmaza. A logikai szitát alkalmazva:

$$|J \cup O| = 7 + 5 - 3 = 9.$$

Rajtuk kívül vannak még nyolcan, akiket a lányok – papíron legalábbis – kikosaraztak. Így 17 fiú jár az osztályba. Evelinen és Lilin kívül pedig még 14 lány tanul ott, összesen 16-an. Az osztályba eggyel több fiú jár, mint lány.

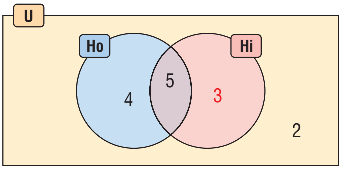
1065 Kétféle megoldást is adunk.

I. Logikai szitával: Jelölje Hi a hintázó, Ho a homokozó gyermekek halmazait. A kergetőzőket nem jelöljük külön, beleesnek az összes bölcsist tartalmazó U univerzumba.

$$14 = |U| = |Ho \cup Hi| + 2 = |Ho| + |Hi| - |Ho \cap Hi| + 2 = 9 + |Hi| - 5 + 2.$$

Innen $|Hi| = 8$, a csak hintázók száma pedig $8 - 5 = 3$.

II. Venn-diagrammal:



1066 Nem lehetséges. Minden szám vagy az egyik, vagy a másik halmazba esik. A két halmaz uniójának s-sel jelölt elemszáma:

$$\frac{2}{3} \cdot s + \frac{3}{4} \cdot s - \frac{1}{2} \cdot s = \frac{11}{12} \cdot s,$$

ami szerint az unión kívül is vannak még elemek. Ez viszont ellentmond az első feltételnek.

1067 Jelölje a tálban levő g darab gumicukrok közül A az állatos, S a többszínű cukrok halmazait. Ekkor

$$|U| = g = |A \cup S| + 0{,}1 \cdot g = |A| + |S| - |A \cap S| + 0{,}1 \cdot g =$$
$$= 0{,}4 \cdot g + 0{,}8 \cdot g - |A \cap S| + 0{,}1 \cdot g,$$

ahonnan $|A \cap S| = 0{,}3 \cdot g$. Mivel 10% pontosan $9 + 6 = 15$ cukrot jelent, így a tálban összesen 45 darab színes állatfigurás gumicukor volt. Azóta persze Eszter is evett belőle.

1068 *a)* Jelölje M a matematika, N a magyar nyelvtan házit készítők halmazát. Ekkor

$$|U| = |M \cup N| + 3 = |M| + |N| - |M \cap N| + 3 = 13 + 15 - 8 + 3 = 23.$$

A csoport 23 fős.

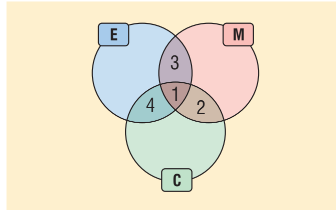
Megjegyzés: A másik lehetőség Venn-diagramba írni az elemszámokat.

b) Csak a matek házit $13 - 8 = 5$ fő készítette el, ez pedig a 23-nak $100 \cdot \frac{5}{23} \approx 21{,}74\%$-a.



1069 Jelölje az eperfagyit kedvelők halmazát E, a málnásokat M, a citromot szeretőket C. Rajzoljuk fel a Venn-diagramot, majd haladjunk belülről kifelé. Az ábrába került számokhoz még 13-t kell adnunk, így az osztálylétszám:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 13 = 23 \text{ fő.}$$



1070 Az első mondat alapján $U = V \cup P$, ahol V a verseket, P a prózát tartalmazó könyvek halmaza. Tudjuk még, hogy $|V| = 9$, $|P| = 7$ és $|V \cap P| \geq 1$. Mivel legalább egy olyan könyv van, amelyik csak prózát tartalmaz, ezért a metszetben legfeljebb 6 könyv lehet, így

$$6 \geq |V \cap P| \geq 1.$$

A logikai szitát felírva:

$$15 \geq |U| = 9 + 7 - |V \cap P| \geq 10.$$

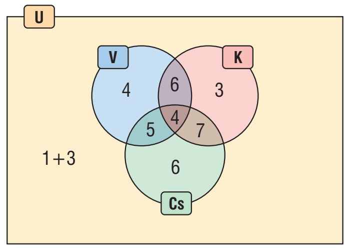
A polcon levő könyvek száma 10-től 15-ig terjedhet.

Megjegyzés: Másik lehetőségként felrajzolhatjuk a Venn-diagramot is.

1071 Kezdjük most logikai szitával. Jelölje U a helyszínen tartózkodók halmazát, V a védőt, K a középpályást és Cs a csatárt már játszott fiúk halmazait. Ne feledjük, Ede és a három kapus is ott volt a megbeszélésen, de nem jelentkezett! Ekkor

$$|U| = 1 + 3 + |V \cup K \cup Cs| = 4 + |V| + |K| + |Cs| -$$
$$- |V \cap K| - |V \cap Cs| - |K \cap Cs| + |V \cap K \cap Cs| =$$
$$= 4 + 19 + 20 + 22 - 10 - 9 - 11 + 4 = 39.$$

Ugyanez Venn-diagrammal az ábrán látható.



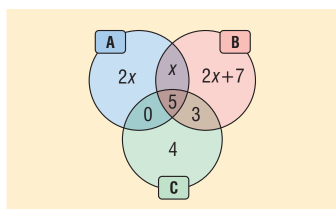
1072 Jelentse H, I, P azon fák halmazait, melyek mellett hóvirág, ibolya, pipacs terem. A szöveg szerint minden fa mellett nyílik valamilyen vadvirág, így a szita formula:

$$f = |H \cup I \cup P| = \frac{2}{3} \cdot f + \frac{7}{15} \cdot f + \frac{1}{3} \cdot f - \frac{1}{10} \cdot f - \frac{1}{5} \cdot f - \frac{7}{30} \cdot f + \overbrace{|H \cap I \cap P|}^{20}.$$

Innen adódik, hogy az összes fa $\frac{1}{15}$-e 20 darab, vagyis a kertben 300 fa található.

1073 *a)* Az (1) feltétel szerint $(A \cap C) \setminus B$-be nem esik egy elem sem, a hármas metszetbe viszont 5. Ez és a (6) feltétel szerint $(A \cap B) \setminus C$-ben 3 elem található. Így C számosságával végeztünk is, mert csak C-be 4 elem esik (hogy (3) alapján összesen 12-t kapjunk). Persze nem ez volt a kérdés.

A (4) feltétel szerint írhatjuk be x és $2x$ kifejezéseket. Mivel (2) miatt B-nek 10-zel több eleme van, mint A-nak, így csak B-be $2x + 7$ kerül. Az (5) feltétel szerint pedig $2 \cdot 2x = 2x + 7 + 3$, ahonnan $x = 5$. Tehát $|A| = 20$, $|B| = 30$.



b) Összeadva az egyes részekben levő számokat, az eredmény 44.

1074 *a)* Jelölje B, H, P a Bécsben, Helsinkiben, Prágában járt színjátszók halmazait. Mivel 55%-uk járt csak egy városban, így 45%-uk, vagyis 27 fő több helyen is. Tudjuk, hogy $(H \cap P) \setminus B$ üres halmaz, ezért

$$27 = 21 + 15 - |H \cap P \cap B|.$$

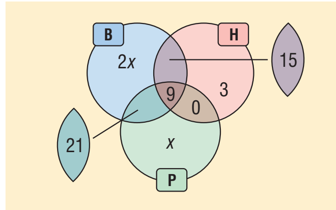
Innen a hármas metszet elemszámára 9 adódik.



b) Beírhatjuk csak *H*-ba a 3-at, csak *P*-be x-et és csak *B*-be $2x$-et. Mivel a 60 fős társulat tagjainak 55%-a csak egy városba jutott el, így

$$33 = 3x + 3,$$

ahonnan $x = 10$. Ez alapján Bécsben 47 fő, Helsinkiben 18, Prágában pedig 31 fő játszott.



1075 *a)* Érdemes először értelmeznünk a kijelentést. A „metszetük elemszáma”: $|A \cap B \cap C|$, az „elemszámaik számtani közepe” pedig (mivel hárman vannak): $\dfrac{|A|+|B|+|C|}{3}$. A kijelentés szerint előbbi nem nagyobb, mint utóbbi, azaz kisebb vagy egyenlő:

$$|A \cap B \cap C| \le \frac{|A|+|B|+|C|}{3}.$$

Ezt kell igazolnunk.

Mit tudunk bármely metszet elemszámáról? Például azt, hogy kisebb vagy egyenlő az őt alkotó halmazok elemszámainál. Vagyis

$$|A \cap B \cap C| \le |A|, \quad |A \cap B \cap C| \le |B| \quad \text{és} \quad |A \cap B \cap C| \le |C|.$$

Összeadva a fenti három egyenlőtlenséget, majd hárommal elosztva, éppen a kérdezett összefüggést kapjuk.

Megjegyzés: Jól látszik, hogy a kijelentés általánosítható bármennyi véges halmazra.

b) A második részben

$$|A \cap B \cap C| = k \quad \text{és} \quad \frac{|A|+|B|+|C|}{3} = k+1.$$

Utóbbit megszorozva hárommal:

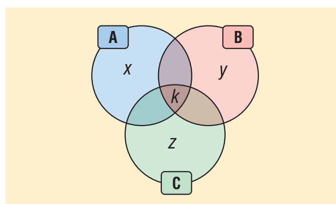
$$|A| + |B| + |C| = 3k + 3.$$

Rendezzük a következőképpen:

$$(|A|-k)+(|B|-k)+(|C|-k)=3.$$

Most vessünk egy pillantást a Venn-diagramra. A feladat szövege szerint x, y, z egyike sem lehet 0. Utolsó egyenletünk ezen feltétel mellett csak úgy lehetséges, ha $x = y = z = 1$ és további elemet nem tartalmaznak a halmazok. Azaz uniójuk elemszámára:

$$|A \cup B \cup C| = k + 3.$$

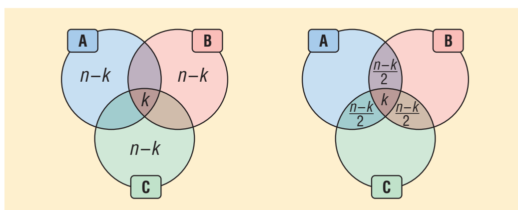


Megjegyzés: Kiderült, hogy a három halmaz elemszáma egyenlő.

c) Gondoljuk meg, hogy a feltételeknek megfelelő két véglet az alábbi két lehetséges helyzet az elemek számára.

Az első esetnél több eleme már nem lehet az uniónak.

A második esetnél pedig kevesebb eleme nem lehet az uniónak.



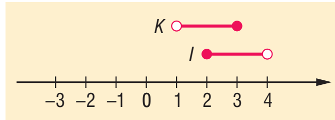
Az ábrából pedig leolvashatjuk a feladatra adott választ is:

$$1{,}5n - 0{,}5k = 3 \cdot \frac{n-k}{2} + k \le |A \cup B \cup C| \le 3 \cdot (n-k) + k = 3n - 2k.$$



Számegyenesek, intervallumok – megoldások

1076 *a)* és *b)* intervalluma az ábrán látható.



c) $J = [-2; 1]$

d) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

1077 *a)* Az I és K intervallumok félig nyitott, félig zárt, a J nyitott, az L pedig zárt intervallumok.

b) Igen, $J \subset K$ és $L \subset K$.

c) Egészítsük ki K-t a jobb végponttal. A megoldás: $K' = [-2; 2]$.

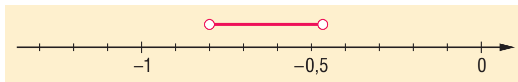
1078 *a)* K nyitott, J zárt, I balról zárt, jobbról nyitott, L pedig fordítva, jobbról zárt, balról nyitott.

b) $I = [0; 3[$; $J = [1; 6]$; $K =]-1; 4[$; $L =]4; 7]$; $I \setminus J = [0; 1[$; $K \setminus I =]-1; 0[\cup [3; 4[$; $J \setminus L = [1; 4]$; $I \cap J = [1; 3[$; $J \cap L =]4; 6]$; $J \cup L = [1; 7]$; $K \cup J =]-1; 6]$

c) I és L, illetve K és L diszjunkt intervallumok.

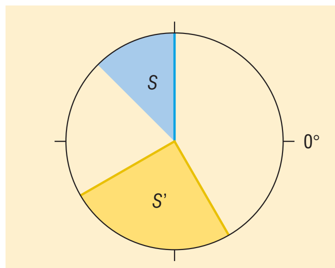
d) $\overline{L} = [-1; 4]$; $\overline{K} = \{-1\} \cup [4; 7]$

1079 *a)* $I = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\frac{4}{5} < x < -\frac{7}{15}\right\}$, számegyenesen:



b) $-\frac{8}{15}, -\frac{9}{15}, -\frac{10}{15}, -\frac{11}{15}$

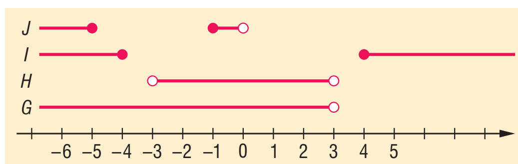
1080 *a)* A megadott intervallumok ábrázolása az egységkörben:



b) A zöld színnel ábrázolt szög: $[135°; 225°[$.

A piros színnel ábrázolt szög: $[270°; 360°[$ vagy $[-90°; 0°[$.

1081 *a) – d)* Ne feledjük, I és J két-két részből áll össze!

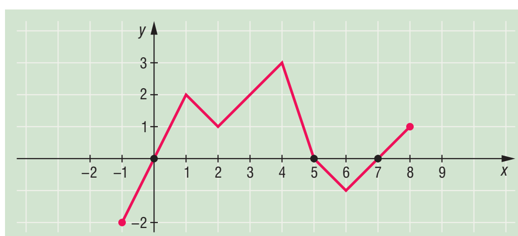


e) $\overline{H} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } |x| \geq 3\}$.

$G(\geq)$ és $I(<)$ esetében igen,

$\overline{J} =]-5; -1[\cup [0; \infty[$.

1082 *a)* Ott van a függvény zérushelye, ahol görbéje metszi az x tengelyt. Az adott függvénynek 3 zérushelye van, az $x = 0$, az $x = 5$, valamint az $x = 7$ helyen.



b) Ott vesz fel negatív értéket, ahol az x tengely alá megy: $[-1; 0[$ és $]5; 7[$ intervallumokon.

c) Növekedési intervallumok: $[-1; 1]$, $[2; 4]$, $[6; 8]$.

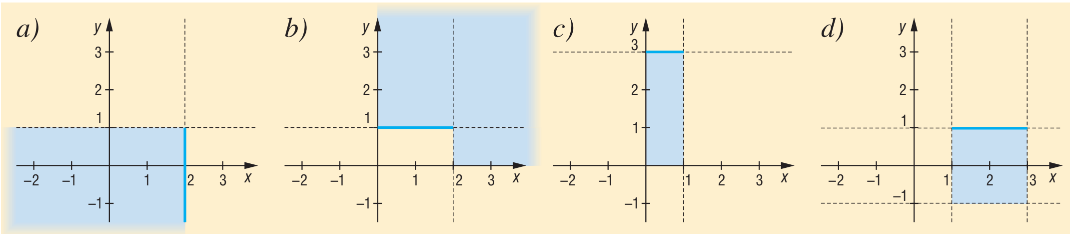


1083 *a)* Felül nyitott negyedsík.

b) Negyedsík, amelynek levágtuk a sarkát. A tengelyek felől nyitott, csak a rövid vízszintes határa tartozik hozzá.

c) Csak felül zárt téglalap.

d) Csak felül zárt négyzet.



1084 *a)* $U = \mathbb{R},\ \overline{H} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -2\} = [-2; \infty[$.

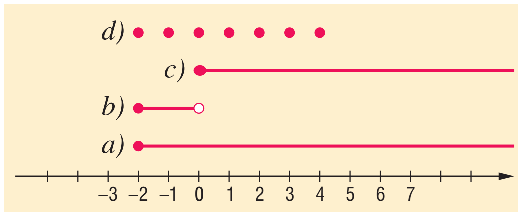
b) $U = \mathbb{R}^-,\ \overline{H} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 > x \ge -2\} = [-2; 0[$.

c) $U = \mathbb{R}_0^+,\ \overline{H} = U = [0; \infty[$.

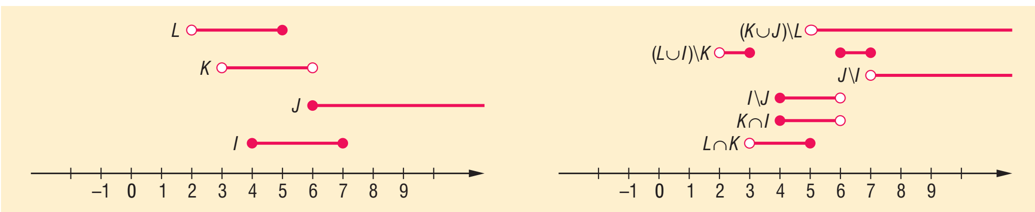
(A H ebben az univerzumban üres halmaz.)

d) $U = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; -2; -3; -4; \dots\}$,

$\overline{H} = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.



1085 *a)* Először érdemes az adott intervallumokat ábrázolni számegyenesen, majd segítségükkel a kérdéses intervallumokat meghatároznunk. A keresett intervallumok alulról felfelé, sorban találhatók.



$$L \cap K =]3; 5], \quad K \cap I = [4; 6[, \quad I \setminus J = [4; 6[, \quad J \setminus I =]7; \infty[,$$
$$(L \cup I) \setminus K =]2; 3] \cup [6; 7], \quad (K \cup J) \setminus L =]5; \infty[$$

b) Az alábbi intervallumokat nem ábrázoltuk számegyenesen, csak leolvastuk az eredményeket.

$$\overline{L} =]5; \infty[, \quad \overline{J} =]2; 6[, \quad \overline{I \cup J} =]2; 4[,$$
$$\overline{I \cup K} =]2; 3] \cup]7; \infty[, \quad \overline{J \cup L \cup K} = \emptyset.$$

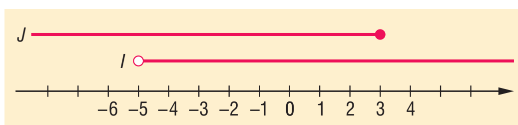
1086 *a)* Mindkettőt külön-külön közös nevezőre hozva, majd azzal megszorozva és átrendezve kapjuk eredményül (közben negatív számmal nem osztottunk, szoroztunk):

$$x > -5 \quad \text{és} \quad x \le 3.$$

b) $I =]-5; \infty[,\ J =]-\infty; 3]$.

c) $I \cap J =]-5; 3],\ I \setminus J =]3; \infty[,\ J \setminus I =]-\infty, -5]$.

d) $I \cup J = \mathbb{R}$, hiszen egyesítésük magát a számegyenest adja.

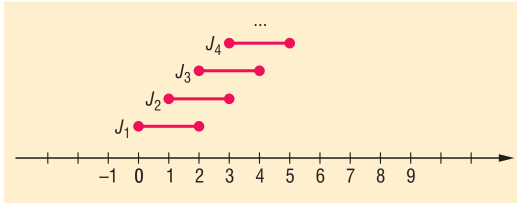




1087 *a)* Érdemes felrajzolni néhány intervallumot (az intervallumot n indexével jelöltük). Ebből már láthatjuk, hogy végtelen lépcsőről van szó. Így könnyen válaszolunk a kérdésekre:

$$J_1 \cap J_2 \cap J_3 = \{2\}.$$

b) $(J_2 \cup J_4) \setminus J_3 = [1;\, 2[\cup]4;\, 5].$

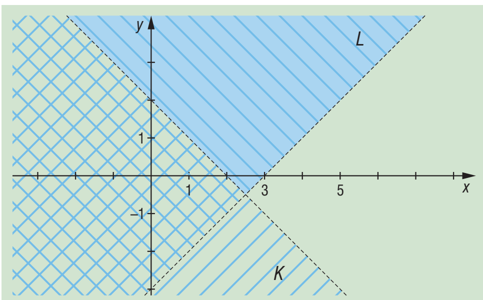


1088 A rajzolás előtt érdemes függvényként gondolni az összefüggésekre, *a)*-ban például $y = -x + 2$, illetve $y = x - 3$ alakban ábrázolni a lineáris függvényeket, majd utána színezni az egyenlőtlenségnek megfelelően! Azt se feledjük el, hogy meg kell mondanunk, hogy a kialakult alakzatokhoz mely határok tartoznak hozzá, és melyek nem.

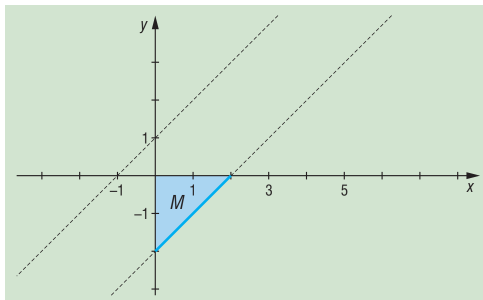
a) A K tartomány a /// irányban satírozott, L pedig \\\\\\. Az $L \setminus K$ tartomány a csak \\\\\\ irányban satírozott felső rész (negyed sík). Határai nem tartoznak hozzá.

b) A kérdéses ponthalmaz egy párhuzamos egyenesek közötti sáv egy darabkája lesz (a derékszögű háromszöghöz a befogók nem tartoznak hozzá, csak az átfogó). Az utolsó feltételek miatt végül az $x - y \geq -1$ feltétel mindig teljesül.

a)



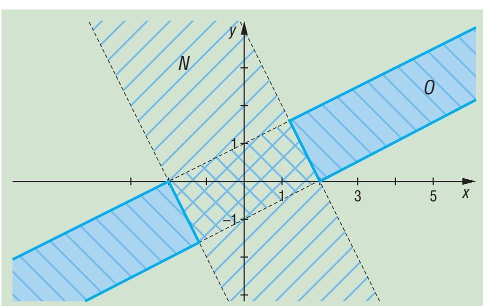
b)



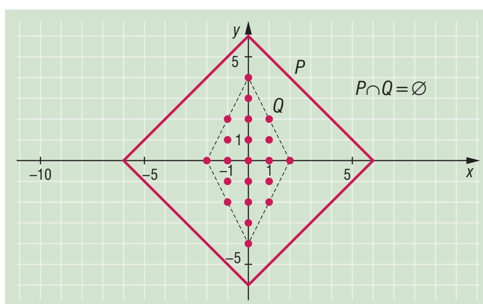
c) Az N és az O is egy-egy sávot határoz meg a síkon. Más irányba dőlnek, és szélességük sem ugyanaz. Ilyen ponthalmazokat úgy is megkereshetünk, ha kipróbálunk jó néhány pontot a síkon, és ellenőrizzük, igaz-e rájuk a feltétel. Elég sok pont után már látni fogjuk a szabályszerűséget. Az $O \setminus N$ eredménye két félsáv (a csak \\\\\\ irányban satírozott részek). Határai hozzá tartoznak, hiszen N a határait nem tartalmazza, így nem is vettük el őket O-ból.

d) P nem egyenlőtlenséget tartalmaz, hanem egyenletet, ezért nem kell satíroznunk: egy négyzetet kapunk. Q-nál oda kell figyelni arra, hogy x és y is csak egész számok lehetnek! Tehát itt sem kell satíroznunk, csak egész koordinátájú pontokat bejelölni. A pontokat a fekete szaggatott vonallal jelölt rombusz szélén vagy azon belül kell keresni (négyzetrácsos füzetben hamar megy). A kérdéses $P \cap Q$ metszet üres halmaz, hiszen egyik gombóc sem esik a négyzet oldalaira.

c)



d)

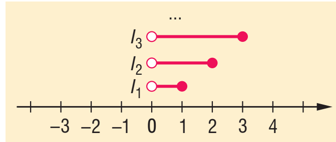




1089 *a)* Ábrázoljuk az intervallumokat. Bármely nagyobb indexű intervallumnak részhalmaza egy kisebb indexű:

$$I_p \subseteq I_q,$$

ahol $p < q$ pozitív egészek.

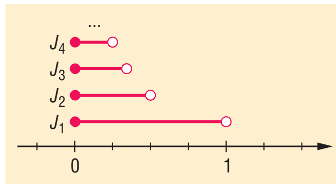


b) A tartalmazások miatt az összes intervallum metszete az első intervallum: $I_1 =]0; 1]$.

c) Egyesítésük a számegyenes pozitív fele, azaz $\mathbb{R}^+$.

Megjegyzés: A *c)* részfeladatra adott válasz pontos bizonyítását csak később adhatjuk meg. A gondolat lényege, hogy bármilyen (nagy) pozitív számot is választunk, előbb-utóbb belekerül valamelyik intervallumba. Például az 111111111 eleme lesz először az 111111111. intervallumnak, majd az utána jövő összes többinek, így uniójuknak is.

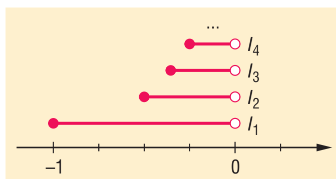
1090 *a)* Intervallumként: $J_n = \left[0; \dfrac{1}{n}\right[$.



b) A számegyenes egyetlen pontjára, a 0-ra igaz, hogy eleme az összes intervallumnak. Van-e rajta kívül másik ilyen érték? Nyilván negatív vagy 1-nél nagyobb szám nem lehet a metszetben, hiszen egyik intervallumnak sem eleme.

Mi a helyzet a 0-hoz nagyon közel levő pozitív számokra? Válasszunk egyet, például az $\dfrac{1}{1000\,000}$-t. Ez elég közel van a 0-hoz. Viszont az intervallumok jobb végpontjai ha lassan is, de egyre közelebb kerülnek a 0-hoz. Az 1000 000. intervallum jobb végpontja például pont a kérdéses érték, vagyis annak már nem eleme az $\dfrac{1}{1000\,000}$. Az $n > 1000\,000$ intervallumokra biztosan nem, azaz az összes metszetébe sem kerülhet bele. A lényeg, hogy bármilyen pici pozitív számmal is próbálkozunk, mindig ezt kapjuk. Tehát a 0 az egyedüli szám, amely a metszetben megtalálható.

1091 *a)* Az ábra nagyon hasonlít az előző feladatban szereplőre, csak kicsit átrendeztük a szakaszokat.



b) A metszetük üres halmaz. Ha a 0 felől zárt intervallumok lennének, akkor a 0 eleme lenne mindegyiknek. Így viszont bármilyen kicsi negatív számot is választunk, pl. –0,001-et, előbb-utóbb a bal végpont átlépi ezt az értéket.

A konkrétan említett –0,001-et az 1001. intervallum már nem fogja tartalmazni, hiszen

$$-0{,}001 = -\frac{1}{1000} < -\frac{1}{1001}.$$

Természetesen az utána jövők sem, így nem lehet a metszetnek eleme.

c) Leolvashatjuk az ábráról, hogy

$$I_n \setminus I_{n+1} = \left[-\frac{1}{n}; -\frac{1}{n+1}\right[.$$

Megjegyzések: Előző és jelen feladat *b)* pontjában említett gondolatmenet vezet el minket később a *határérték* és a *torlódási pont* fogalmához. Megfigyelhetjük azt is, hogy mindkét esetben hasonlóan gondolkodtunk: egy értéket választva beláttuk, hogy az nem megoldása a feladatnak. Az ilyen gondolatmenetet *indirekt bizonyításnak* nevezzük.



Vegyes feladatok – megoldások

1092 *a)* $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ *b)* 4 *c)* 6

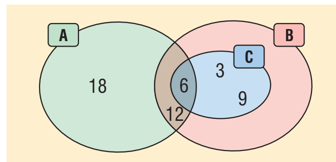
1093 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

1094 *a)* $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ *b)* $3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 72$

1095 *a)* $2 \cdot 2 = 4$ *b)* $\frac{5}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{16}, \frac{9}{20}$

1096 *a)* $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$ *b)* $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$
c) $20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \approx 2{,}43 \cdot 10^{18}$ *d)* $14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \approx 8{,}72 \cdot 10^{10}$
e) $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

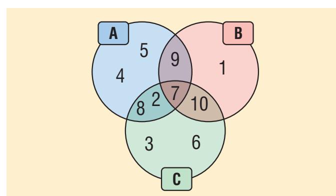
1097 *a)* $\{10; 12; 15; 20; 30; 60\}$
b) A Venn-diagram az ábrán látható.
c) Igaz, igaz.



1098 *a)* {a}, {b}, {c}, {d}, {a; b}, {a; c}, {a; d}, {b; c}, {b; d}, {c; d}, {a; b; c}, {a; b; d}, {a; c, d}, {b; c; d}, $\emptyset$
b) {a; b}, {a; b; c}, {a; b; d}

1099 *a)* $A \setminus B = \{0; 2; 4; 8; 10; 14\}$, $B \setminus A = \{3; 9; 15; 18\}$,
$A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 18\}$, $A \cap B = \{6; 12\}$
b) $\overline{A} = \{-1; 1; 3; 5; 7; 9\}$, $\overline{B} = \{-1; 0; 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10\}$,
$\overline{A} \cap \overline{B} = \{-1; 1; 5; 7\}$, $\overline{A \setminus B} = \{-1; 1; 3; 5; 6; 7; 9\}$

1100 *a)* A Venn-diagram az ábrán látható.
b) $B \setminus A = \{1; 10\}$, $C \setminus B = \{2; 3; 6; 8\}$,
$A \cap C = \{2; 7; 8\}$, $C \cup B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8; 9; 10\}$
c) $B \setminus (A \cup C) = \{1\}$, $\overline{A} \cap (B \cup C \cup \{11\}) = \{1; 3; 6; 10\}$,
$\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)} = \{1; 3; 4; 5; 6\}$



1101 $\overline{A \cup C} \setminus \overline{B} = \{ó; é; ú\}$

1102 $|A \cup B| = 82 = 56 + 93 - |A \cap B|$, innen $|A \cap B| = 67$.

1103 Jelölje G a gitáros számok halmazát, D a dobosokat.

$$|G \cup D| = |G| + |D| - |G \cap D| = 13 + 10 - 8 = 15.$$

A Vízilovaknak 15 saját számuk van.

1104 Kétféle megoldást is adunk.

I. Jelölje H a szuperhősöket, J a járműveket, M a mesehősöket tartalmazó képregények halmazát.

$$|H \cup J \cup M| = 30 = |H| + |J| + |M| - |H \cap J| - |H \cap M| - |J \cap M| + |H \cap J \cap M| =$$
$$= 14 + 9 + 20 - 3 - 5 - |H \cap M| + 1,$$

innen $|H \cap M| = 6$. Mivel a hármas metszet 1, ezért az együtt gyalog járó mese- és szuperhősöket felvonultató képregények száma 5.

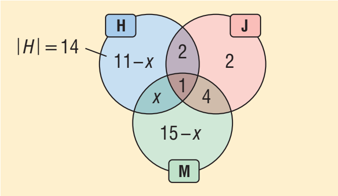


II. Venn-diagrammal:

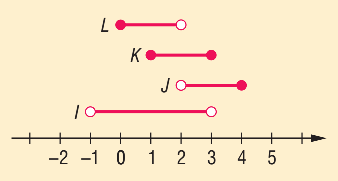
Dávidnak 30 képregénye van, így

$$14 + 2 + 4 + 15 - x = 30,$$

amiből $x = 5$.



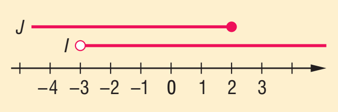
1105 *a)* Az intervallumok ábrázolása:



b) $I \setminus K =]-1; 1[$, $J \cap K =]2; 3]$, $K \cup L = [0; 3]$

c) Igen, J és L. Igen, $L \subseteq I$.

1106 *a)* A megoldások: $x > -3$ és $x \leq 2$. Ábrázolásuk:



b) $I \cap J =]-3; 2]$

c) $I \setminus J =]2; \infty[$

d) $J \setminus I =]-\infty; -3]$